Formula di monotonia

Per ogni $u \in H^1(B_r(x_0))$ definiamo il funzionale

$$W(u,r,x_0) := \frac{1}{r^d}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{r^{d+1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u^2\,d\mathcal{H}^{d-1} + \frac{1}{r^d}\big|\{u>0\}\cap B_r(x_0)\big|.$$

Data una funzione $u \in B_r(x_0)$, possiamo definire

$$u_{r,x_0}(x) = \frac{1}{r}u(x_0+rx)\,.$$

Osserviamo che vale l'identità

$$W(u,rs,x_0) = W(u_{r,x_0},s,0).$$

Quando $r=1$ e $x_0=0$ scriveremo $W(u,1,x_0)=W(u)$.

Lemma 1 (Formula di Weiss)**.** *Siano $B_R(x_0)\subset\mathbb{R}^d$ e $u\in C^\infty(B_R(x_0))$. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial r}W(u_{x_0,r}) = \frac{d}{r}\big(W(z_{x_0,r})-W(u_{x_0,r})\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2\,d\mathcal{H}^{d-1},$$

dove $z_{x_0,r}: B_1\to\mathbb{R}$ è l'estensione 1-omogenea di $u_{x_0,r}$ in B_1, ovvero

$$z_{x_0,r}(x) := |x|\,u_{x_0,r}\left({}^{x}\!/_{|x|}\right).$$

Proof. Definiamo

$$W_0(u,r,x_0) := \frac{1}{r^d}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{r^{d+1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Allora,

$$W(u,r,x_0) = W_0(u,r,x_0) + \frac{1}{r^d}\big|\{u>0\}\cap B_r(x_0)\big|.$$

Sappiamo già che vale la formula

$$\frac{\partial}{\partial r}W_0(u_{x_0,r}) = \frac{d}{r}\big(W_0(z_{x_0,r})-W_0(u_{x_0,r})\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Quindi è sufficiente mostrare che si ha

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^d}\big|\{u>0\}\cap B_r(x_0)\big|\right] = \frac{d}{r}\Big(\big|\{z_{r,x_0}>0\}\cap B_1\big| - \big|\{u_{r,x_0}>0\}\cap B_1\big|\Big).$$

Infatti, basta osservare che

$$\big|\{u_{r,x_0}>0\}\cap B_1\big| = \frac{1}{r^d}\big|\{u>0\}\cap B_r(x_0)\big|,$$

e

$$\begin{aligned}
\big|\{z_{r,x_0}>0\}\cap B_1\big| &= \frac{1}{d}\mathcal{H}^{d-1}\Big(\{z_{r,x_0}>0\}\cap\partial B_1\Big)\\
&= \frac{1}{d}\mathcal{H}^{d-1}\Big(\{u_{r,x_0}>0\}\cap\partial B_1\Big)\\
&= \frac{1}{dr^{d-1}}\mathcal{H}^{d-1}\Big(\{u>0\}\cap\partial B_r(x_0)\Big) = \frac{1}{dr^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\big|\{u>0\}\cap B_r(x_0)\big|\Big].
\end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Se $u\in H^1(B_R)$ è una funzione tale che*

$$\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1} = 0 \quad \textit{per Lebesgue quasi-ogni} \quad r\le R,$$

dove

$$u_r(x) = \frac{1}{r}u(rx),$$

allora u è 1-omogenea.

Proof. Per ogni $0 < s < t < R$, abbiamo

$$\int_{\partial B_1} |u_t(\theta) - u_s(\theta)|\,d\theta \le \int_{\partial B_1} \int_s^t \frac{1}{r}\Big|\theta \cdot \nabla u(r\theta) - \frac{1}{r}u(r\theta)\Big|\,d\theta = 0.$$

Di conseguenza, esiste una funzione $\varphi : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u_r(\theta) = \varphi(\theta),$$

per ogni $r > 0$, e quindi u è della forma

$$u(r\theta) = r\varphi(\theta).$$

□

Proposizione 3. *Siano D un aperto in $\mathbb{R}^d$, u un minimo locale di $\mathcal{F}$ in D e $x_0 \in D$ un punto sul bordo di $\{u > 0\}$. Allora, la funzione*

$$r \mapsto W(u, r, x_0)$$

è monotona crescente. In particolare, esiste il limite

$$\lim_{r\to 0} W(u, r, x_0).$$

Se inoltre, u_0 è un blow-up di u in x_0, allora u_0 è una funzione 1-omogenea.

Proof. Senza perdita di generalità, supponiamo che $x_0 = 0$. Allora, per ogni $r > 0$ e $s > 0$ vale la formula

$$W(u_r, s) = W(u_{rs}, 1) = W(u, rs).$$

Ora, siccome la funzione $r \mapsto W(u, r)$ è monotona crescente, esiste il limite

$$L = \lim_{r\to 0} W(u, r).$$

Inoltre, per ogni successione $r_n \to 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} W(u, r_n) = L.$$

Ora, supponiamo che u_{r_n} sia una successione che converge al blow-up $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, forte H^1 e uniformemente su ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e tale che $\mathbb{1}_{\{u_{r_n}>0\}}$ converge forte $L^1(B_R)$ a $\mathbb{1}_{\{u_0>0\}}$. Allora, per ogni fissato $s > 0$, abbiamo

$$L = \lim_{n\to+\infty} W(u, sr_n) = \lim_{n\to+\infty} W(u_{r_n}, s) = W(u_0, s).$$

Di conseguenza, la funzione

$$s \mapsto W(u_0, s)$$

è costante. Per il Lemma precedente u_0 è una funzione 1-omogenea. □